

Cours 24

G fini, $k :=$ un corps algébriquement clos, $\text{car}(k) = 0$
(e.g. $\mathbb{C}$)

Lemme (Schur) Soit A un anneau

Soient M, N deux A -modules irréductibles

(les seules sous- A -modules sont 0 et M)

Soit $f: M \rightarrow N$ un morphisme de A -modules

Alors f est zero ou f est un isom.

Preuve: $\text{Ker}(f) \subset M$ est un sous-module

$\Rightarrow \text{Ker}(f) = 0$ ou M

$\Downarrow$
 $f = 0$

$\text{Im}(f) \subset N$ est un sous-module

$\Rightarrow \text{Im}(f) = 0$ ou N

$\Downarrow$
 $f = 0$

Donc $f = 0$ ou $\begin{cases} \text{Ker}(f) = 0 \\ \text{Im}(f) = N \end{cases}$

$\Downarrow$
 f est isom.

□

Lemme de Schur pour représentation

Soient V, W deux représentations de G irréductibles

Soit $f: V \rightarrow W$ un morphisme de rep.

Alors $f=0$ ou f est un isom.

- si de plus $k=\bar{k}$ et $V=W$, alors $f=\lambda \cdot \text{Id}_V$ pour certain $\lambda \in k$

Preuve • le cas spécial de $A=k[G]$.

- $k=\bar{k} \Rightarrow \exists$ une valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(f)$

$f - \lambda \cdot \text{Id}_V$ est un morphisme de rep.

Schur $\Rightarrow f - \lambda \cdot \text{Id}_V$ est 0 ou ~~non~~ $\square$
car $\ker(f - \lambda \text{Id}) \neq 0$

Semi-simplicité $G = \text{fini}$, $k = \mathbb{C}$

Prop Toute représentation de G est la somme directe des sous-représentations irréductibles.

c-à-d. $\forall V \in G\text{-Mod}$ tq $\dim_k V < \infty$.

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

avec $V_i \subset V$ sous- G -mod. irréductible

Lemme ^($k=\mathbb{C}$) Soit V un G -module dim finie.
 Alors V admet un produit hermitien G -invariant
 i.e. $\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ ^{produit hermitien}
 tq $\langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall g \in G$
 $\forall x, y \in V$.

Preuve : Soit $\langle -, - \rangle_0 : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$
 un produit hermitien quelconque.

On considère $\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gx, gy \rangle_0$$

• $\langle -, - \rangle$ est un produit hermitien. (Exo)

• $\forall g \in G$

$$\langle gx, gy \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \langle hgx, hgy \rangle_0$$

$$h' := hg \implies \frac{1}{|G|} \sum_{h' \in G} \langle h'x, h'y \rangle_0$$

$$= \langle x, y \rangle$$

□

Preuve de Prop. Par lemme, on fixe $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit hermitien G -invariant.

$\forall W \subset V$ sous- G -module
 alors $W^\perp$ est un sous- G -module
 • $V = W \oplus W^\perp$ décomp de G -mod.

En effet, $W^\perp$ est stable par l'action de G :

$$\left(\begin{array}{l} \forall u \in W^\perp \quad \forall g \in G, \forall w \in W \\ \langle w, gu \rangle = \langle \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{g^t w}, u \rangle = 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow W^\perp$ est un sous- G -mod de V

• $V = W \oplus W^\perp$ par algèbre linéaire.

En générale, on démontre la prop. par réc. sur $\dim V$.

Soit $V \in G\text{Mod}$ de $\dim < \infty$

- si V est irréductible ✓

- sinon, $\exists 0 \neq W \subsetneq V$ sous- G -module propre.

$\Rightarrow V = W \oplus W^\perp$ comme G -modules

$$0 < \dim W, \dim W^\perp < \dim V$$

hyp. réc.) $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$
 $W^\perp = U'_1 \oplus \dots \oplus U'_r$

Sommes directes en sous- G -mod. irréductibles

$\Rightarrow V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r \oplus U'_1 \oplus \dots \oplus U'_r$ est une décomposition de V en somme directe des sous- G -mod. irréductibles. $\square$

Rq la décomposition n'est pas unique.
ex. si $V \cong \mathbb{1}^{\oplus n}$ est une représentation triviale de $\dim n$.

Donc toute décomposition de V en somme directe de sous-espaces de $\dim 1$ est une décomp. en sous- G -mod. irréd.

Rq On va démontrer que les collections des irréductibles à l'isom près qui apparaissent dans V avec leur multiplicités

sont uniquement déterminées par V .

Lemme Soient $V, W \in G\text{-Mod}$.

$$\leadsto \text{Hom}_k(V, W) \in G\text{-Mod},$$

On a un isom.

$$\text{Hom}_G(V, W) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_k(V, W)^G$$

$$\text{Hom}_{k[G]}(V, W)$$

(Rappel : $V \in G\text{-Mod}$, alors $V^G \in k\text{Vect}$)

Preuve : $\text{Hom}_k(V, W)^G$

$$= \left\{ f: V \rightarrow W \mid \begin{array}{l} f: k\text{-lin.} \\ \forall g \in G, g.f = f \end{array} \right\}$$

(Rappel : $g.f := g \circ f \circ g^{-1} := \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$)

$$\forall g \in G \quad g.f = f \iff g \circ f \circ g^{-1} = f \iff g.f = f \circ g$$

$$\iff f \in \text{Hom}_G(V, W) \quad \square$$

Caractères

Def (Caractères) Soit $V \in G\text{-Mod}$
de $\dim V < \infty$

$$\rho = G \rightarrow GL(V)$$

on définit

$$\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g \longmapsto \chi_V(g) = \text{tr}(\rho(g))$$

Rq χ_V contient beaucoup (en fait toute)
information sur V :

Raison. $\chi_V(g^n) = \text{tr}(\rho(g)^n)$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$

permettent de déterminer $\text{Sp}(\rho(g))$

Si $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$
alors $\text{tr}(M^n) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^n$
 $\xRightarrow{\text{Newton}}$ on a toute les fonctions symétriques élé.
de $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.

$$V, W \in G\text{-Mod}$$

Lemme (i) χ_V est une fonction de classe,

i.e. $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g) \quad \forall g, h \in G.$

$$(ii) \quad \chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$$

$$(iii) \quad \chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$$

$$(iv) \quad \chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$$

$$(v) \quad \chi_{\text{Hom}_K(V, W)} = \overline{\chi_V} \cdot \chi_W$$

$$(vi) \quad \chi_{\mathbb{1}} = 1$$

Preuve: (i) $\chi_V(hgh^{-1}) = \text{tr}(f(hgh^{-1}))$
 $= \text{tr}(f(h) \cdot f(g) \cdot f(h)^T) = \text{tr}(f(g))$
 $= \chi_V(g)$

$$(ii) \quad \forall g \in G, \quad f_V(g) \in GL(V) \text{ est}$$

d'ordre fini. (car g est d'ordre fini)

$\Rightarrow \rho_V(g)$ est diagonalisable

(car $T^{\text{ord}(g)} - 1$ est scindé de racines simples)

Donc V admet une base $\{e_1, \dots, e_m\}$

tg $g \cdot e_i = \lambda_i e_i$ pour certain $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$

i.e. $\rho_V(g)$ est de matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$

De même $W \xrightarrow{\quad} \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$

$\xrightarrow{\quad} \rho_W(g) \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda'_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \chi_{V \oplus W}(g) = \sum_{i=1}^m \lambda_i + \sum_{j=1}^n \lambda'_j = \chi_V(g) + \chi_W(g).$$

(iii) la base duale de V^V : $\{e_1^*, \dots, e_m^*\}$

$$(e_i^*(e_j) = \delta_{ij})$$

Rappel: $g \cdot e_i^* = e_i^* \circ \rho_V(g)^T$

$$\Rightarrow (g \cdot e_i^*)(e_j) = e_i^*(g^T \cdot e_j) = e_i^*(\lambda_j^{-1} e_j) = \lambda_j^{-1} \cdot \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow g \cdot e_i^* = \lambda_j^* e_i^* = \overline{\lambda_j} e_i^*$$

Notons que $|\lambda_j| = 1$

$$\Rightarrow \text{la matrice de } g \text{ est } \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_m} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_{V^*}(g) = \text{tr}(\rho_{V^*}(g)) = \sum \overline{\lambda_i} = \overline{\chi_V(g)}$$

(iv) bases comme avant

$$V: \{e_1, \dots, e_m\} \quad g \cdot e_i = \lambda_i e_i$$

$$W: \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \quad g \cdot \varepsilon_j = \lambda'_j \varepsilon_j$$

$$V \otimes W = \text{Vect} \{ e_i \otimes \varepsilon_j \mid \substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n} \}$$

$$g \cdot (e_i \otimes \varepsilon_j) = (g \cdot e_i) \otimes (g \cdot \varepsilon_j) = (\lambda_i e_i) \otimes (\lambda'_j \varepsilon_j) = \lambda_i \lambda'_j \cdot (e_i \otimes \varepsilon_j)$$

$$\chi_{V \otimes W}(g) = \text{tr}(\rho_{V \otimes W}(g)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\lambda_i \lambda'_j)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \lambda'_j \right)$$

$$= \text{tr}(\rho_V(g)) \cdot \text{tr}(\rho_W(g))$$

$$= \chi_V(g) \chi_W(g)$$

(v). (Exo) priver directement.

Preuve alternative - $\text{Hom}_k(V, W) \cong V^v \otimes_k W$ isom. de G -mod

$$\rightarrow \chi_{\text{Hom}_k(V, W)} = \chi_{V^v \otimes_k W} \stackrel{(iv)}{=} \chi_{V^v} \chi_W \stackrel{(iii)}{=} \overline{\chi_V} \chi_W$$

□

Prop Soit $V \in G\text{Mod}$ de $\dim_k V < \infty$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) = \dim_{\mathbb{C}}(V^G)$$

Preuve: $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(P_V(g))$

$$= \text{tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} P_V(g) \right)$$

$$\pi := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} P_V(g) \in \text{End}_k(V)$$

• $\pi \circ \pi = \pi$ (i.e. π est un projecteur de V)

$$\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_V(g) \right) \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} f_V(h) \right)$$

$$= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} f_V(g) \circ f_V(h) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} f_V(gh)$$

$$\begin{aligned} \overset{g' = gh}{=} & \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{g' \in G} f_V(g') = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underbrace{\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} f_V(g') \right)}_{\pi} \\ & = \pi \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \underline{I_m(\pi) = V^G}$$

$$\boxed{\supseteq}: \quad \forall x \in V^G \quad \text{i.e.} \quad \overset{f(g)(x)}{g \cdot x = x} \quad \forall g \in G$$

$$\pi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot x = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x = x$$

(1)
 $I_m(\pi)$

$$\boxed{\subseteq} \quad \forall x \in V \quad \forall g \in G$$

$$g \cdot \pi(x) = g \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h \cdot x \right)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} g \cdot (h \cdot x) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (gh) \cdot x$$

$$g' = gh \quad \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} g' \cdot x = \pi(x)$$

$\Rightarrow \pi = \text{projecteur de } V \text{ sur } V^G$

$$\Rightarrow \text{tr}\left(\frac{1}{|G|} \sum g\right) = \text{tr}(\pi) = \dim V^G \quad \square$$

Cor Soit $V, W \in G \text{ Mod}$ et $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$
 $\dim_{\mathbb{C}} W < \infty$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(V, W) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} (\text{Hom}_G(V, W))^G \end{aligned}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(V, W) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} (\text{Hom}_G(V, W))^G \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}_G(V, W)}(g)$$

$$\underline{\text{Lemme (v)}} \quad \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g)$$

□

Def (pairing) Soient $f, f' \in \mathcal{L}(G)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f: G \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{q } f(hgh^{-1}) = f(g) \end{array} \right\}$$

$$\langle f, f' \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} f'(g)$$

En particulier, si $V, W \in G \text{ Mod}$

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g)$$

$$\underline{\text{Cor}} \quad \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(V, W)$$

Cor (Orthonormie)

Soient $V, W \in G \text{ Mod}$ irréductibles

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

si $V \not\cong W$

si $V \cong W$

Preuve: Lemme de Schur

□

Thm G fini, $k = \mathbb{C}$
les caractères des représentations irréductibles
forment une base orthogonale de $\mathcal{C}(G)$

Preuve: $\{ \chi_{V_1}, \dots, \chi_{V_r} \}$ l'ensemble des classes d'isom.
des rep. irred.

• Liberté:
Soit

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \chi_{V_i} = 0 \quad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

$$\Rightarrow \left\langle \chi_{V_j}, \sum_{i=1}^r \lambda_i \chi_{V_i} \right\rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, r$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \sum_{i=1}^r \lambda_i \underbrace{\langle \chi_{V_j}, \chi_{V_i} \rangle}_{\parallel \delta_{ij}} \end{aligned}$$

$$\parallel \lambda_j$$